#### שאלה 1:

נתון כי הוא מרחב -ציקלי ממימד הנוצר ע"י , לכן קיים לו בסיס .

יהי אופרטור לינארי המתחלף עם . נפעיל את על איברי הבסיס ונקבל:

מתקיים כי , לכן הם ק"ל של איברי הבסיס, כלומר:

*נגדיר ונקבל כי:*

לכן כנדרש.

#### שאלה 2:

**סעיף א':**

נתון כי לכסין, לכן קיים בסיס המורכב מו"ע, נסמן .

נתון ציקלי, לכן קיים כך שמתקיים .

ע"פ משפט, קיים ל- בסיס .

בבסיס מתקיים:

לכן נקבל כי מטריצת המעבר מבסיס לבסיס היא:

נניח בשלילה כי יש שני ע"ע זהים, אזי נקבל במטריצה שורת אפסים, לכן , כלומר אינה הפיכה, בסתירה להגדרת מטריצת מעבר כמטריצה הפיכה.

**סעיף ב':**

תחת הבסיס נגדיר .

לכן נקבל:

אם נשים את הוקטורים במטריצה על מנת לבדוק תלות לינארית, נקבל:

כלומר קיבלנו את מטריצת , וכאשר כל הע"ע שונים, זו מטריצה הפיכה, לכן בת"ל, לכן בסיס ולכן הוא מרחב ציקלי הנוצר ע"י כנדרש.

#### שאלה 3:

**סעיף א':** נתון כי נילפוטנטית מסדר 4, לכן קיים בלוק בגודל .

לכן בנוסף ייתכנו 2 בלוקים מסדר או בלוק יחיד מסדר :

**סעיף ב':** מספר הבלוקים מסדר הוא .

ע"פ משפט, מספר הבלוקים הכולל הוא .

ע"פ הנתונים, נילפוטנית מסדר 4, לכן ע"פ משפט הבלוק הגדול ביותר הוא מסדר .

מתקיים: .

בסה"כ קיבלנו כי יש 2 בלוקים מסדר , בלוק אחד מסדר , שלושה בלוקים מסדר , שלושה בלוקים מסדר .

**סעיף ג':** מתקיים .

מספר הבלוקים הכולל הוא .

קיבלנו כי נילפוטנטית מסדר 3, לכן יש בלוק מסדר .

מספר הבלוקים מסדר : .

מספר הבלוקים מסדר : .

לכן יש שני בלוקים מסדר , לכן צורת ז'ורדן היא:

#### שאלה 4:

לכל מתקיים , לכן נילפוטנטית מסדר .

לא ייתכן כי נילפוטנטית מסדר נמוך יותר, כי למשל עבור מתקיים .

נילפוטנטית, לכן כל הע"ע הם 0.

כמו כן, הבלוק הגדול ביותר הוא מסדר , לכן יש בלוק אחד, לכן נקבל:

נילפוטנטית, לכן קיים כך שהקבוצה היא בסיס עבור .

מס' הו"ע של מטריצה נילפוטנטית הוא כמס' הבלוקים, כאן יש לנו בלוק אחד, לכן ו"ע יחיד.

אנו יודעים כי מתקיים .

לכן הוא ו"ע.

נגדיר ונקבל כי ולכן כנדרש.

הקבוצה היא בת"ל, כי כל איבר הוא פולינום מדרגה שונה, לכן מהווה בסיס.

ובבסיס זה מתקיים , כי מתקיים:

ובאופן דומה לכל כאשר מתקיים

ועבור מתקיים: כנדרש, כי הוא הו"ע.